Über charakteristische Eigenschaften der Divisionsringe[1])

Von KARLHEINZ BAUMGARTNER in Gießen

In der vorliegenden Note werden von SZELE herrührende Ergebnisse diskutiert bzw. verschärft. Es gilt:

(1) Ein Ring ohne Nullteiler mit wenigstens einem minimalen Linksideal ist ein Divisionsring (vgl. [3]).

(2) Besitzt ein kommutativer Ring R ein minimales Ideal M, so ist der Restklassenring von R nach einem M nicht enthaltenden Primideal ein Körper. Daher sind alle Primideale, die mit einem minimalen Ideal nur das Nullelement gemeinsam haben auch maximal und modular.[2])

Bemerkung. Das ist eine Richtigstellung der zweiten Aussage in [3]. Man kann nämlich nicht schließen, daß mit R auch jeder Restklassenring nach einem Primideal ein minimales Ideal besitzt. Z.B. ist im Ring $R = \mathbf{Z} \oplus GF(2)$ offensichtlich der Primkörper $GF(2)$ ein Primideal und gleichzeitig das einzige minimale Ideal, wenn $\mathbf{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen ist. Aber $R/GF(2) \cong \mathbf{Z}$ besitzt keine minimalen Ideale. Man sieht auch, daß das Primideal $GF(2)$ keineswegs maximal in R ist.

Die Aussage (1) ist eine Verschärfung der Tatsache, daß ein Artinring ohne Nullteiler ein Divisionsring ist[3]). Hingegen ist (2) keine Verschärfung der ebenfalls bekannten Tatsache, daß in einem kommutativen Artinring jedes Primideal maximal und modular ist.[3])

Hier wird gezeigt, daß (1) noch wesentlich verschärft werden kann. Nämlich zu:

(I) Besitzt ein Ring R wenigstens ein minimales Linksideal und enthält dieses wenigstens ein Element a, welches kein Rechtsnullteiler von R ist, so ist R ein Divisionsring.

Da (2) eine unmittelbare Folge aus (1) folgt, liegt es nahe auch davon die Verallgemeinerung auszusprechen:

(II) Es sei A ein Ideal des Ringes R. Gibt es nun wenigstens ein A minimal umfaßendes Linksideal B und gibt es wenigstens ein b aus B, so daß stets mit $r \cdot b$ auch r Element von A ist, so ist A maximal und modular.

Wir bemerken, daß (II) eine unmittelbare Folge von (I) ist. Bildet man nämlich R/A, B/A, so folgt, daß B/A in R/A minimales Linksideal mit nicht lauter R/A-

[1]) Divisionsringe nennen wir die Körper und Schiefkörper.

[2]) Ein Linksideal L eines Ringes R heißt modular, wenn es ein e aus R gibt, sodaß für jedes a aus R stets $a - ae$ in L ist.

[3]) Vgl. B. L. v. D. WAERDEN, *Algebra.* II, S. 198, oder E. ARTIN, C. J. NESBITT, R. M. THRALL, *Rings with minimum condition,* 1946, S. 59, Theorem 6. 10.

Rechtsnullteilern ist. Nach (I) ist dann R/A ein Divisionsring, also ist A modular und maximal in R.

Daß die Bedingung nur hinreichend ist, sieht man mit Hilfe von (I) schon am Beispiel der einfachen Artinringe. Hingegen ist sie bekanntlich im kommutativen Fall wohl auch notwendig. Klar ist, daß sich (II) für Artinringe vereinfacht und daß offenbar (2) eine Folge von (II) ist.

Sei nun M ein R-Linksmodul, W eine wohlgeordnete Menge der Ordnungszahl I erzeugender Elemente von M.[4]) Faßt man W als $I\times 1$ Spalte auf und bezeichnet A_I den vollen Matrixring der zeilenendlichen $I\times I$ Matrizen über R, so bilden die Matrizen C aus A_I mit $C\cdot W=0$ ein Linksideal L (Relationslinksideal) in A_I. Ist $N(L)$ der Normalisator von L in A_I, d.h. der größte Unterring, in dem L sogar Ideal ist und bedeutet K die Menge der zeilenendlichen Matrizen B aus $N(L)$ mit $A_I\cdot B\subset L$, so haben wir

Lemma. *Für den R-Endomorphismenring E von M gilt die Isomorphie*

$$E\cong N(L)/K.$$

Beweis. Ist B aus $N(L)$, so wird durch β: $W\to B\cdot W$ in M ein R-Endomorphismus induziert. Denn: Durch die geforderte Additivität und Linearität bestimmt β eine Abbildung von M in sich mit diesen Eigenschaften. Zu jedem m aus M gibt es eine $1\times I$ Zeile A mit Elementen aus R, sodaß $m=A\cdot W$ gilt. Ist nun $A\cdot W=0$, so folgt wegen $B\in N(L)$

$$\beta(AW)=A(\beta W)=A(BW)=(AB)W=0.$$

Da jeder R-Endomorphismus durch ein $B\in A_I$ beschrieben werden kann und weil dabei das Nullelement von M natürlich festbleibt, folgt $L\cdot B\subset L$, also ist $B\in N(L)$. Somit wird $N(L)$ auf E epimorph abgebildet. Aus der Definition von K folgt, daß K der Epimorphiekern ist. Damit ist der Beweis beendet.

Da E stets den identischen Endomorphismus enthält ist $K\supset L$ von A_I verschieden. Daher ist klar:

Korollar. (Jacobson [1], S. 26.) *Ist M ein irreduzibler R-Modul, so gilt für seinen Endomorphismendivisionsring E die Isomorphie $E\cong N(L)/L$. Dabei ist L das annulierende (modulare maximale) Linksideal* (0: u) *eines von Null verschiedenen Elements u aus M. Umgekehrt gilt für jedes maximale modulare Linksideal L, daß $N(L)/L$ ein Divisionsring ist.*

Die unter (I) gemachte Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß einerseits der R-Endomorphismenring eines minimalen Linksideals (aufgefaßt als irreduzibler R-Linksmodul) ein Divisionsring E ist, andererseits ist das annullierende Linksideal L des Elements a das Nullideal, da ja a kein Rechtsnullteiler ist. Dann ist $N(0)=R$ und somit $R\cong E$, also ein Divisionsring.

Schlußbemerkung. Ähnlich könnte man zeigen, daß ein Ring ohne Linksideale (vgl. [2], [4]) ein Divisionsring oder ein Zeroring von Primzahlordnung ist.

[4]) Das soll heißen: Jedes $m\in M$ hat eine Darstellung $m=\sum_{i\in I} r_i w_i$ mit $r_i\in R$, $w_i\in W$, wobei höchstens endlich viele r_i von Null verschieden sind.

Übrigens ist dies auch aus (I) zu erschließen. Der Ring R ist nämlich selbst ein minimales Linksideal und ist er kein Zeroring (von Primzahlordnung), so gibt es ein $a \in R$ welches kein (Rechts)-Annullator ist. Somit muß das a annullierende Linksideal L das Nullideal sein. Also ist a kein Rechtsnullteiler und (I) anwendbar.

Literatur

[1] N. JACOBSON, *Structure of Rings* (New Haven, 1956).
[2] F. A. SZÁSZ, Note on rings in which every proper left-ideal is cyclic, *Fund. Math.*, **44** (1957), 330—332.
[3] T. SZELE, Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper, *Comment. Math. Helv.*, **22** (1949), 115—116.
[4] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Acad. Rep. Pop. Român. Bul. Şti.*, **1** (1949), 788—790.

(Eingegangen am 1. April 1966)